



# Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité

Marc Bonnet, Huy Duong Bui, Andrei Constantinescu

## ► To cite this version:

Marc Bonnet, Huy Duong Bui, Andrei Constantinescu. Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité. *Mechanics & Industry*, 2003, 4, pp.687-697. 10.1016/j.mecind.2003.09.011 . hal-00092399

**HAL Id: hal-00092399**

**<https://hal.science/hal-00092399>**

Submitted on 9 Aug 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial| 4.0 International License

# Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité (*Variational principles and exploitation of field measurements in elasticity*)

Marc BONNET<sup>1</sup>, Hui Duong BUI<sup>2</sup>, Andrei CONSTANTINESCU<sup>3</sup>

*Mécanique et Industries*, **4**:687–697 (2003)

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique des solides (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, 01 69 33 33 27 (téléphone), 01 69 33 30 26 (télécopie), [bonnet@lms.polytechnique.fr](mailto:bonnet@lms.polytechnique.fr)

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique des solides (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, 01 69 33 33 74 (téléphone), 01 69 33 30 26 (télécopie), [bui@lms.polytechnique.fr](mailto:bui@lms.polytechnique.fr)

<sup>3</sup>Laboratoire de Mécanique des solides (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, 01 69 33 33 30 (téléphone), 01 69 33 30 26 (télécopie), [constant@lms.polytechnique.fr](mailto:constant@lms.polytechnique.fr)

**Résumé.** Il est parfois nécessaire d'identifier certaines grandeurs ou certains paramètres caractérisant des structures ou des matériaux. Cela passe dans tous les cas par l'exploitation de données expérimentales, et les mesures de champs, par la richesse des informations fournies, sont particulièrement bien adaptées à ces objectifs.

Cet article a pour objet de présenter certaines techniques d'inversion particulièrement adaptées à l'exploitation de mesures de champs. L'identification de champs de modules élastiques est choisie comme un problème modèle commode pour l'exposition, mais d'autres problèmes d'identification peuvent être abordés dans le même esprit. On s'efforce en particulier de montrer que l'identification par exploitation de mesures de champs ne doit pas nécessairement se faire par la minimisation de critères de type moindres carrés sur les observations, car le fait de disposer de *champs* mesurés permet de définir d'autres critères, d'une part adaptés à ce type de données et d'autre part obtenus comme conséquences directes des principes variationnels de l'élasticité. Les critères considérés ici sont principalement l'erreur en relation de comportement et l'écart à la réciprocité. Divers exemples d'illustration, de nature purement numérique pour la plupart, sont présentés.

**Mots-clés :** Identification / Mesures de champ / Principes variationnels / Erreur en relation de comportement / Écart à la réciprocité

**Abstract.** Sometimes parameters pertaining to constitutive materials or to the overall definition of a mechanical structure need to be identified in an indirect manner from experimental measurements. Field measurements provide rich data and, as such, are particularly well suited to material or structural parameter identification problems.

In this article, identification techniques specifically devised for the exploitation of field measurements are presented. The identification of distributed elastic moduli is used as a model problem, but other identification problems can be treated along similar lines. This article emphasizes the fact that one is by no means limited to using output least-squares cost functions for solving such identification problems. Indeed, the availability of field measurements allow to define other criteria, well-suited to this type of data and directly linked to fundamental variational principles. Most of this article is devoted to two criteria of this family, namely the error in constitutive equation and the reciprocity gap functional. Various illustrative examples, generally of a synthetic (i.e. purely numerical) nature are provided.

**Keywords :** Identification / Field measurements / Variational principles / Error in constitutive equation / Reciprocity gap

# 1 Introduction

Il est parfois nécessaire d'identifier certaines grandeurs ou certains paramètres caractérisant des structures ou des matériaux : champs de modules ou d'endommagement, fissures et autres défauts, paramètres de comportement non linéaire... Cela passe dans tous les cas par l'exploitation de données expérimentales. Les mesures de champs (déplacements, déformations, formes propres modales, température...), par la richesse des informations fournies, sont particulièrement bien adaptées à ces objectifs.

Cet article a pour objet de donner un aperçu de certaines techniques d'inversion particulièrement adaptées à l'exploitation de mesures de champs. Pour des raisons de concision, nous concentrons cet article sur l'identification de champs de modules élastiques, traitée comme un problème modèle, mais les démarches exposées peuvent être transposées à bien d'autres problèmes d'identification. Le développement de ces techniques est récent, et les applications à des mesures expérimentales sont encore peu nombreuses.

Le propos de cet article est principalement de montrer que l'identification par exploitation de mesures de champs ne doit pas nécessairement se faire par la minimisation de critères de type moindres carrés sur les observations (section 2). Le fait de disposer de *champs* mesurés permet de définir d'autres critères, d'une part adaptés à ce type de données et d'autre part obtenus comme conséquences directes des principes variationnels de l'élasticité. Les critères considérés ici sont l'erreur en relation de comportement (section 3) et l'écart à la réciprocité (section 5), avec une très brève mention de l'exploitation du principe des puissances virtuelles (section 4), entrant dans ce cadre général mais à laquelle nous n'avons pas contribué. La plupart des exemples présentés dans cet article sont de nature purement numérique, et ont pour but principal d'illustrer les méthodes présentées.

**Définition d'un problème modèle.** On considère donc une structure  $\Omega$ , faite d'un matériau linéairement élastique dont le champ tensoriel  $C^*(x)$  ( $x \in \Omega$ ) des modules élastiques est de la forme  $C_0 + \delta C$ , où  $C_0$  est connu et  $\delta C$  inconnu (avec l'hypothèse  $\delta C = 0$  sur la frontière  $\partial\Omega$ ). On suppose connu sur toute la frontière  $\partial\Omega$  le déplacement  $\xi$  résultant de l'application d'efforts surfaciques  $\varphi$  également connus sur tout  $\partial\Omega$  (selon le point de vue, le champ mesuré est donc soit  $\xi$  soit  $\varphi$ ). Ces champs sont donc les traces sur  $\partial\Omega$  d'un déplacement  $u^*$  inconnu, vérifiant :

$$\operatorname{div}(C^* : \varepsilon(u^*)) = 0 \quad (\text{dans } \Omega), \quad u^* = \xi \text{ et } [C^* : \varepsilon(u^*)] \cdot n = \varphi \quad (\text{sur } \partial\Omega) \quad (1)$$

(où  $\varepsilon(\cdot) = (\nabla(\cdot) + \nabla^T(\cdot))/2$ ). Les données aux limites surabondantes dans (1) ont pour vocation de compenser le défaut d'information sur  $C^*$ . Ce dernier étant inconnu, il n'est bien entendu pas possible de résoudre directement (1). Il est utile pour la suite de définir les déplacements  $u^D[C]$  et  $u^N[C]$  qui vérifient, pour un tenseur d'élasticité  $C$  donné, les conditions qui suivent (et qui, en particulier, peuvent être calculés) :

$$\operatorname{div}(C : \varepsilon(u^{D,N})) = 0 \quad (\text{dans } \Omega), \quad u^D = \xi ; \quad [C : \varepsilon(u^N)] \cdot n = \varphi \quad (\text{sur } \partial\Omega) \quad (2)$$

## 2 Fonction-coût régularisée

Une approche maintenant classique pour ce type de problème d'identification consiste à définir une fonction-coût régularisée [23], souvent choisie de type « moindres carrés » par commodité. Par exemple, considérant  $\varphi$  comme imposé et  $\xi$  comme mesuré, on pourrait chercher  $C^*$  via :

$$C^* = \arg \min_C \mathcal{J}(C) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(C) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u^N[C] - \xi|^2 dS + \alpha \mathcal{R}(C) \quad (3)$$

où la fonction positive  $\mathcal{R}(C)$  est utilisée pour exprimer une information a priori complémentaire et  $\alpha > 0$  est un (petit) *paramètre de régularisation*. La régularisation a pour but de rendre la minimisation plus stable par rapport aux erreurs sur les données  $\xi$ , la valeur de  $\alpha$  pouvant être choisie soit par essais et erreurs, soit par une procédure algorithmique [13] comme la validation croisée. En pratique,  $C$  est bien sûr paramétrisé d'une manière quelconque.

**Etat adjoint.** La minimisation de  $\mathcal{J}(C)$  est souvent accomplie au moyen d'algorithmes utilisant le gradient de  $\mathcal{J}$ . La technique la plus efficace et sûre pour calculer ce gradient est la méthode de l'état adjoint. Elle repose dans le cas présent sur l'exploitation de

$$\delta \mathcal{J} = \alpha \partial_C \mathcal{R} \cdot \delta C + \int_{\Omega} \nabla u^N : \delta C : \nabla \tilde{u}^N dV \quad (4)$$

où le champ adjoint  $\tilde{\mathbf{u}}^N[\mathbf{C}]$  défini par :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}:\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^N)) = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega), \quad [\mathbf{C}:\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^N)] \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{u}^N - \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{sur } \partial\Omega) \quad (5)$$

**Etat adjoint et conditions de contact.** Il est intéressant de signaler que la méthode de l'état adjoint peut également être appliquée dans le cas où le problème inverse est défini avec l'aide des conditions aux limites de contact [22] :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}:\varepsilon(\mathbf{u}^{\text{D},N})) = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{\text{D}} \cdot \mathbf{n} \leq g + \xi(\text{sur } \Gamma_C) \quad \int_{\Gamma_C} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}:\varepsilon(\mathbf{u}^N)] \cdot \mathbf{n} = \phi \quad (7)$$

où  $\Gamma_C$  est la surface de contact potentiel et  $g$  la forme de l'indenteur rigide.

En considérant  $\xi$  imposé et  $\phi$  comme mesuré :

$$\mathbf{C}^* = \arg \min_{\mathbf{C}} \mathcal{J}(\mathbf{C}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma_C} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}:\varepsilon(\mathbf{u}^{\text{D}})] \cdot \mathbf{n} \, dS - \phi \right)^2 + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{C}) \quad (8)$$

La minimisation de  $\mathcal{J}(\mathbf{C})$  repose également sur l'exploitation de (4) avec un champ adjoint  $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{D}}[\mathbf{C}]$  solution du problème :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}:\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^{\text{D}})) = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega), \quad \tilde{\mathbf{u}}^{\text{D}} \cdot \mathbf{n} = - \left( \int_{\Gamma_C} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}:\varepsilon(\mathbf{u}^{\text{D}})] \cdot \mathbf{n} \, dS - \phi \right) \quad (\text{sur } \Gamma_{\text{eff}}) \quad (9)$$

où  $\Gamma_{\text{eff}} \subset \Gamma_C$  représente la surface effective de contact obtenue dans le problème direct.

**Commentaires.** Les techniques fondées sur la minimisation de fonctions-coût de type (3) présentent l'avantage de la flexibilité ; elles permettent en particulier de traiter des mesures d'origines physiques variées et/ou incomplètes. Elles sont en revanche assez « aveugles » au sens où la définition du critère lui-même repose sur un choix arbitraire et parfois peu physique de distance. C'est pourquoi il peut être intéressant de proposer d'autres critères à contenu physique plus fort. La suite de cet article est ainsi consacrée à des fonctions-coût construites à partir des principes variationnels de la théorie de l'élasticité : erreur en relation de comportement et écart à la réciprocité.

En complément de cette section, la section 3.4 présente une comparaison numérique entre fonctions-coût de type moindres carrés et d'erreur en relation de comportement.

### 3 Erreur en relation de comportement

#### 3.1 Élasticité statique

Considérons la somme des énergies potentielle et complémentaire, pour des champs génériques de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}) \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (10)$$

Une conséquence bien connue des principes variationnels de l'élasticité est que, pour  $\mathbf{C}$  donné et des conditions aux limites bien posées :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}} E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}) = 0 \quad (11)$$

où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  désignent respectivement les espaces de déplacements cinématiquement admissibles et de contraintes statiquement admissibles avec les données aux limites et des forces volumiques nulles. De plus, si  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ , on peut reformuler  $E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C})$  de façon à faire apparaître l'écart en relation de comportement :

$$E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}:\varepsilon(\mathbf{u})) : \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}:\varepsilon(\mathbf{u})) \, dV \quad (12)$$

ce qui met en particulier en évidence la positivité de  $E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C})$ . Cela suggère alors, pour le problème d'identification de champs de modules élastiques, de définir l'erreur en relation de comportement  $\mathcal{E}(\mathbf{C})$  associée aux données  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi}$  par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{C}) = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}} E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C})$$

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} \text{ sur } \partial\Omega\} \quad \mathcal{S} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega; \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (13)$$

où la définition des espaces de champs admissibles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  tient compte du fait qu'on exploite des données aux limites  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$  surabondantes. En général (c'est-à-dire quand  $\mathbf{C}$  n'est pas correctement connu), le couple  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$  est incompatible, et  $\mathcal{E}(\mathbf{C}) > 0$ . Quand  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$ , le couple  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$  est compatible, et  $\mathcal{E}(\mathbf{C}^*) = 0$ .

On peut alors montrer, en dualisant les conditions d'admissibilité (13), que la valeur de  $\mathcal{E}(\mathbf{C})$  s'exprime de trois manières différentes, équivalentes, en termes des champs  $\mathbf{u}^D[\mathbf{C}]$  et  $\mathbf{u}^N[\mathbf{C}]$  définis par (2) :

$$\mathcal{E}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^N)) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^N)) \, dV \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^D) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^N)) : \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^D) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^N)) \, dV \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^D) \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\varphi}) \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^N) \, dS \quad (16)$$

- **Identification.** Les paramètres définissant le champ  $\mathbf{C}$  peuvent alors être identifiés via la minimisation de l'erreur en relation de comportement  $\mathcal{E}(\mathbf{C})$  [11]. Cette minimisation est particulièrement avantageuse dans la direction des champs de déformation cinématiquement admissibles et celle des champs des contraintes statiquement admissibles car la fonctionnelle est une somme des énergies potentielle et complémentaire et conduit ainsi à faire intervenir des problèmes d'équilibre élastique de deux types classiques (à déplacements imposés et à forces imposées). Pour simplifier la minimisation selon la direction des modules élastiques, une des méthodes proposées et mise en œuvre consiste à décomposer le tenseur des modules élastiques dans ses vecteurs et valeurs propres.
- **Localisation spatiale.** De plus, on sait [6] que, pour des données  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi}$  parfaites et complètes, la densité d'erreur en relation de comportement  $e[\mathbf{C}](\mathbf{x})$  définie par

$$e[\mathbf{C}](\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^N)) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^N))(\mathbf{x}) \quad (17)$$

tend à prendre ses valeurs les plus élevées dans les « zones mal modélisées », c'est-à-dire sur le support du contraste inconnu  $\delta\mathbf{C}$  et dans son voisinage. Cette propriété résulte du fait que le champ

$$\mathbf{u}^D[\mathbf{C}] - \mathbf{u}^N[\mathbf{C}] = (\mathbf{u}^D[\mathbf{C}] - \mathbf{u}^*) - (\mathbf{u}^N[\mathbf{C}] - \mathbf{u}^*)$$

est la somme de deux solutions de problèmes d'inclusion caractérisée par le contraste  $\delta\mathbf{C}$ , avec conditions aux limites homogènes respectivement de type Dirichlet ou Neumann ; ils peuvent donc être représentés en termes de dérivées secondes de fonctions de Green, ce qui permet de montrer la décroissance vers zéro de leur densité d'énergie de déformation au-delà du support de  $\delta\mathbf{C}$  [3, 11]. Cette propriété est donc particulièrement utile dans le cas où les zones mal modélisées sont de faible étendue devant la taille de  $\Omega$  (défauts).

La méthode de minimisation de l'erreur en relation de comportement a un lien étroit avec les approches par fonctionnelles de Kohn-Vogelius [17] et les moindres carrés pénalisés par dualité [9] (ce dernier cas revient à considérer des fonctionnelles du type (20) dans lesquelles on fait le passage à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$ ).

A titre d'illustration, la figure 1 présente un exemple numérique de carte de densité d'erreur en relation de comportement, pour un solide de forme carrée contenant une inhomogénéité élastique  $\delta\mathbf{C}$  telle que  $|\delta\mathbf{C}| = |\mathbf{C}_0|$ , sous l'hypothèse des déformations planes. La mesure simulée correspond à un couple force-déplacement (on a calculé la réponse en déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  du solide avec inclusion pour une distribution de force imposée  $\boldsymbol{\varphi}$ ). On constate que, en-dehors d'effets de bord, le maximum de cette densité correspond bien à la région de l'inhomogénéité élastique  $\delta\mathbf{C}$ .

### 3.2 Extension aux plaques

On considère la flexion, sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff, d'une plaque  $\Omega$  constituée d'un matériau élastique. Les rigidités de flexion inconnues sont notées  $\mathbf{C}^*$ . On suppose connus sur la frontière la déflexion

$\phi$ , sa dérivée normale  $\psi$ , une distribution linéique des moments de torsion  $\Phi$  et une des forces  $\Psi$ . Ces champs sont les traces sur la frontière d'une déflexion inconnue  $u^*$ , c'est-à-dire vérifient :

$$\begin{aligned} u^* &= \phi \\ \nabla u^* \cdot \mathbf{n} &= \psi \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}^* : \nabla \nabla u^*] \cdot \mathbf{n} &= \Phi \quad (\text{sur } \partial\Omega) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}^* : \nabla \nabla u^*] \cdot \mathbf{t}) + (\text{div}[\mathbf{C}^* : \nabla \nabla u^*]) \cdot \mathbf{n} &= \Psi \end{aligned}$$

le champ  $u^*$  vérifiant par ailleurs l'équation d'équilibre :

$$\text{div div} (\mathbf{C}^* : \nabla \nabla u^*) = 0$$

Un raisonnement similaire à celui de l'élasticité volumique permet de définir un écart en loi de comportement, utilisant la somme des énergies potentielle et complémentaire pour des champs de déflexion  $u$  et de moments  $\mathbf{M}$  :

$$E(u, \mathbf{M}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{M} - \mathbf{C} : \nabla \nabla u) : \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{M} - \mathbf{C} : \nabla \nabla u) dV \quad (18)$$

et de l'erreur en relation de comportement  $\mathcal{E}(\mathbf{C})$  associé aux données au limites  $\phi, \psi, \Phi, \Psi$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{C}) &= \arg \min_{u \in \mathcal{C}, \sigma \in \mathcal{S}} E(u, \mathbf{M}, \mathbf{C}) \quad (19) \\ \mathcal{C} &= \{u \mid u = \phi \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = \psi \text{ sur } \partial\Omega\} \\ \mathcal{S} &= \{\sigma \mid \text{div div } \mathbf{M} = 0 \text{ dans } \Omega; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \Phi \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) + (\text{div } \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} = \Psi \text{ sur } \partial\Omega\} \end{aligned}$$

Les paramètres identifaint  $\mathbf{M}$  peuvent être alors identifiées via la minimisation de l'erreur en loi de comportement [12].

### 3.3 Extension aux vibrations libres

Le concept d'erreur en relation de comportement a été largement développé dans le domaine du recalage de modélisations à partir d'essais dynamiques [21, 20, 18], et en particulier la faculté de localisation spatiale a fait l'objet d'études théoriques [3, 4] et numériques.

Plaçons-nous donc dans le cas de vibrations libres du solide élastique. Outre le tenseur des modules élastiques, une autre caractéristique du matériau est sa distribution de masse volumique  $\rho^*(\mathbf{x}) = \rho_0 + \delta\rho$  (avec  $\delta\rho = 0$  sur  $\partial\Omega$ ), et on cherche à reconstruire  $\delta\mathbf{C}$  et  $\delta\rho$  de façon à reproduire des mesures de type vibratoire. Notons ainsi par  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}$  les valeurs mesurées d'une fréquence propre  $\omega$  et du champ de déplacement modal  $\mathbf{u}$  associé à cette fréquence.

Les distributions  $\rho^*, \mathbf{C}^*$  sont cherchées de façon à minimiser le critère d'erreur  $J$  :

$$J = \left\{ \sum_{\tilde{\omega} \text{ mesuré}} \frac{\gamma}{2} \int_D a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) dV + \eta_{\tilde{\omega}}(\mathbf{C}, \rho) \right\} \quad (20)$$

où  $a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})$  est une forme bilinéaire de type densité d'énergie,  $D \subseteq \Omega$  est la partie du solide sur laquelle les déplacements modaux sont mesurés,  $\gamma$  est un coefficient de pondération ; la sommation porte sur l'ensemble des modes mesurés  $(\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{u}})$ . La notation  $\eta_{\tilde{\omega}}(\mathbf{C}, \rho)$  désigne l'erreur globale en relation de comportement, ici définie par :

$$\begin{aligned} \eta_{\tilde{\omega}}(\mathbf{C}, \rho) &= \min_{\sigma, \Gamma} \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (\sigma - \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u})) : \mathbf{C}^{-1} : (\sigma - \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u})) dV \\ &\quad + \frac{1-\alpha}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho \tilde{\omega}^2} |\Gamma + \rho \tilde{\omega}^2 \mathbf{u}|^2 dV \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{sous la contrainte} \quad \int_{\Omega} (\sigma : \varepsilon(\mathbf{w}) + \Gamma \cdot \mathbf{w}) dV = 0 \quad (\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}) \quad (22)$$

où  $\sigma$  et  $\Gamma$  sont des contraintes et des accélérations, respectivement. Le minimum dans (21) est cherché pour les champs admissibles, c'est-à-dire respectant les conditions aux limites et vérifiant l'équilibre dynamique (22). Le coefficient  $0 \leq \alpha \leq 1$  permet de pondérer à volonté les contributions des erreurs en relations



de comportement élastique ( $\alpha = 1$ ) et dynamique ( $\alpha = 0$ ). On peut montrer [19, 10] que l'erreur globale en relation de comportement s'annule si et seulement si les distributions de modules élastiques et de masse volumique sont exactes (c.à.d.  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$  et  $\rho = \rho^*$ ).

On peut alors montrer par le calcul des variations [4] que les champs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\Gamma}$  réalisant le minimum dans (21) sont de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \frac{1}{\alpha}\mathbf{w}) \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = -\rho\tilde{\omega}^2[\mathbf{u} + \frac{1}{(1-\alpha)}\mathbf{w}] \quad (24)$$

où  $\mathbf{w}$  est un champ de déplacement adjoint. Les champs  $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  sont solution du problème couplé :

$$\begin{cases} \alpha \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) dV - \int_{\Omega} \rho\tilde{\omega}^2\mathbf{w}\delta\mathbf{u} dV + \gamma \int_D a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) dV = 0 & (\forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}) \\ \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \frac{1}{\alpha}\mathbf{w})\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{w}) - \rho\tilde{\omega}^2(\mathbf{u} + \frac{1}{(1-\alpha)}\mathbf{w})\delta\mathbf{w} \right] dV = 0 & (\forall \delta\mathbf{w} \in \mathcal{V}) \end{cases} \quad (25)$$

L'expérimentation numérique a amplement montré que les distributions  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$  et  $\rho|\mathbf{w}|^2$  de densités d'erreur en relation de comportement tendent ici encore à prendre leurs valeurs maximales dans les « zones mal modélisées », et fournissent donc une bonne estimation du support géométrique des corrections  $\delta\rho, \delta\mathbf{C}$ , particulièrement dans le cas où les zones mal modélisées sont de faible étendue devant la taille de  $\Omega$ .

Ce constat peut, ici encore, être justifié (au moins partiellement). Considérant pour simplifier la seule erreur en relation de comportement élastique ( $\alpha = 1$  et  $\boldsymbol{\Gamma} = -\rho\tilde{\omega}^2$ ) et supposons (cas idéalisé) que la mesure du champ de déplacement modal  $\tilde{\mathbf{u}}$  est exacte et complète ( $D = \Omega$ ). Alors, dans la situation limite  $\gamma \rightarrow \infty$ , le système (25) se réduit à :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{w}) dV = - \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})\Delta\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{w}) - \Delta\rho\tilde{\omega}^2\tilde{\mathbf{u}}.\delta\mathbf{w} \right] dV \quad (\forall \delta\mathbf{w} \in \mathcal{V}) \quad (26)$$

où on a utilisé le fait que  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$  est le mode propre pour la pulsation propre  $\tilde{\omega}$  et les distributions  $\mathbf{C}^*$  et  $\rho^*$ . Le champ  $\mathbf{w}$  est ainsi solution d'un problème d'équilibre. Si les corrections sont localisées dans un sous-domaine  $\bar{\Omega}$  of  $\Omega$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  est donné par :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \int_D [\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})(\mathbf{y}) : \Delta\mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Delta\rho\tilde{\omega}^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}).\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dV_y \quad (27)$$

où  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est le tenseur de Green pour les constantes élastiques  $\mathbf{C}$  et des conditions aux limites homogènes bien choisies sur  $\partial\Omega$ . Ce résultat montre que la densité d'erreur en relation de comportement  $e[\mathbf{C}](\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$  calculée en  $\mathbf{x} \notin \bar{\Omega}$  décroît comme  $r^{-6}$  (défaut de raideur, c.à.d.  $\delta\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ ) ou comme  $r^{-4}$  (défaut de masse, c.à.d.  $\delta\rho \neq 0$ ), où  $r$  désigne une distance caractéristique entre  $\mathbf{x}$  et  $\bar{\Omega}$  (ceci provient du fait que, pour des solides tridimensionnels,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{-1}$ ). Cette analyse corrobore le fait, habituellement constaté lors des expérimentations numériques, que la localisation spatiale fournie par la carte de densité  $e[\mathbf{C}]$  est meilleure pour les défauts de raideur.

**Exemples.** Deux exemples sont maintenant présentés, aux fins d'illustration de la capacité de  $e[\mathbf{C}](\mathbf{x})$  à localiser *a priori* le support d'un défaut.

Le premier exemple, réalisé dans le cadre d'un enseignement à l'Ecole Polytechnique (TP de modélisation numérique), est entièrement synthétique. La structure modélisée est une tour d'aéro-réfrigérant, dans laquelle une fissure a été simulée. Un mode propre  $\tilde{\mathbf{u}}$  de la tour fissurée a été calculé numériquement, et la distribution d'erreur en relation de comportement a été calculée numériquement, en se plaçant dans le cas où le champ  $\tilde{\mathbf{u}}$  est entièrement connu. La figure 2 montre le maillage et (à travers la distribution de module d'Young) le défaut simulé. La figure 3 présente la carte d'erreur en relation de comportement (en bas). On y voit que, dans ce cas très favorable d'un mode propre connu entièrement et parfaitement (à l'approximation éléments finis près), la carte d'erreur en relation de comportement permet une localisation spatiale très précise du défaut. Ceci met en lumière l'avantage de disposer d'une mesure de champ de déformée modale.

Le deuxième exemple porte sur un montage expérimental (Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches) consistant en une coque cylindrique de révolution (figure 4) avec  $E = 1,97 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

(module d'Young),  $\nu = 0,3$  (coefficient de Poisson),  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  (masse volumique) encastrée sur une plaque plane circulaire reposant sur un support rigide via trois appuis élastiques (situés en  $r = 0,3 \text{ m}$ ,  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ , de raideur estimée à  $k = 10^7 \text{ N/m}$  selon les trois axes de coordonnées). La composante normale du déplacement modal est mesurée en 48 capteurs (4 rangées de 12 capteurs situés à intervalles réguliers sur les sections circulaires à 22,5cm, 45cm, 67,5cm et 90cm au-dessus de la plaque circulaire). Deux « défauts » de sévérité croissante ont été créés par deux phases d'enlèvement de matière (trous rectangulaires). Les fréquences et modes propres ont été mesurés pour la coque avec les deux cas de défauts.

Un modèle éléments finis de la structure a été préparé, à l'aide de l'environnement CASTEM 2000 ; la partie cylindrique comprend quatre couronnes de 24 éléments de coque à huit nœuds (3 déplacements and 3 rotations inconnus par nœud), pour un total de 3822 degrés de liberté. Les emplacements des capteurs coïncident avec des nœuds du maillage.

La figure 5 représente les valeurs de l'erreur en relation de comportement sur chaque élément (densité  $e[C](x)$  intégrée sur l'élément), normalisée de sorte que le maximum soit l'unité, obtenue pour les « petit » et « grand » défaut (respectivement situés sur les éléments 61-62 et 61-62-63-64) à partir de données modales expérimentales pour 13 fréquences propres, soit  $13 \times 48$  déplacements. Les valeurs les plus élevées de l'erreur en relation de comportement répartie correspondent bien aux défauts et leur voisinage (au sens du maillage éléments finis).

### 3.4 Comparaison entre moindres carrés et erreur en relation de comportement

Aux fins de comparer sur un exemple les fonctionnelles (3) de moindres carrés sur les déplacements et (13) d'erreur en relation de comportement, on considère un solide élastique isotrope occupant le carré unité (hypothèse des déformations planes), discrétisé au moyen d'un maillage régulier de  $20 \times 20$  éléments à quatre nœuds. Un « défaut », sous la forme d'une inhomogénéité de module d'Young de forme rectangulaire (carré de côté 0,25 m, centrée en  $(x_d = 0,375 \text{ m}, y_d = 0,5 \text{ m})$ , voir figure 6) est utilisé pour simuler des couples de « mesures » force-déplacement  $(\varphi_k, \xi_k)$ ,  $1 \leq k \leq N$  sur la frontière. Chacun de ces couples est obtenu par application d'une distribution de forces imposées  $\varphi_k$  (profil parabolique de pression sur une largeur de 10 éléments, centré en l'un des nœuds intérieurs de la frontière du carré et tronqué quand il débord du côté du carré), soit ici  $N = 76$  distributions de forces linéairement indépendantes au total ; la réponse  $\xi_k$  en déplacement du solide avec « défaut » est alors calculée pour chaque  $\varphi_k$ . Chaque couple  $(\varphi_k, \xi_k)$  peut être considéré comme définissant une « expérience », la mesure de champ étant  $\xi_k$ .

On calcule alors les fonctionnelles (3), avec  $\mathcal{R}(C) = 0$ , et (13) pour des « défauts d'essai » correspondant à des inhomogénéités de même forme, taille et contraste de modules que le « défaut » servant à simuler les données, mais centrées en  $(x_e = 0,125 + 0,0625i, y_e = 0,125 + 0,0625j)$ . Les « défauts d'essai » sont donc paramétrés par  $i$  et  $j$ , et on a ainsi généré des champs de modules élastiques  $C[i, j](x)$ . Pour chaque  $C[i, j]$ , on peut définir à travers (2) les champs de déplacement  $u_k^D[i, j]$  (réponses pour le déplacement imposé  $\xi_k$ ) et  $u_k^N[i, j]$  (réponses pour la force imposée  $\varphi_k$ ). On considère ainsi fonctionnelles (3) et (13) comme fonctions de  $i, j$ , soit :

$$\begin{aligned} J(i, j) &= \mathcal{J}(C[i, j]) \\ &= \sum_{k \in (\text{expériences})} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\xi_k - u_k^N[i, j]|^2 dS \end{aligned} \quad (28)$$

et

$$\begin{aligned} E(i, j) &= \mathcal{E}(C[i, j]) \\ &= \sum_{k \in (\text{expériences})} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon(u_k^D[i, j]) - \varepsilon(u_k^N[i, j])) : C : (\varepsilon(u_k^D[i, j]) - \varepsilon(u_k^N[i, j])) dV \end{aligned} \quad (29)$$

Les fonctionnelles  $J(i, j)$  et  $E(i, j)$  sont représentées graphiquement sur la figure 7 (somme sur les 76 « expériences ») et la figure 8 (somme sur deux « expériences » définies par  $k = 9$  et  $k = 10$ ). La fonctionnelle  $J(i, j)$  est visuellement un peu plus « plate » que  $E(i, j)$  sur la figure 7 (cas favorable où on cumule un grand nombre de mesures de champs), et cette différence s'accroît quand on réduit le nombre d'expériences utilisées, comme le montre la figure 8, sur laquelle on voit que la fonctionnelle d'erreur en relation de comportement  $E(i, j)$  a un minimum beaucoup plus clairement défini que la fonctionnelle aux moindres carrés  $J(i, j)$ .

## 4 Méthode des champs virtuels

Pour un état d'équilibre sous chargement imposé  $\varphi$  sur  $\partial\Omega$ , le principe des puissances virtuelles (PPV) impose :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) dV = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS \quad (\forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}) \quad (30)$$

où le champ virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}$  n'est assujéti qu'à des conditions de régularité. Pour  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$ , le PPV peut alors être exploité si le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$  est mesuré sur tout  $\Omega$ , ce qui est réalisable par exemple pour des plaques : chaque choix de champ virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}$  permet alors de former une équation scalaire indépendante, et il est possible de choisir les champs  $\tilde{\mathbf{u}}$  de façon judicieuse par rapport au problème posé [14].

## 5 Méthode de l'écart à la réciprocité

### 5.1 Principe

Dans le cas, plus vraisemblable pour des solides massifs, où les données portent sur des couples  $(\boldsymbol{\xi}, \varphi)$  à la frontière, on peut alors construire à partir du PPV une fonction d'*écart à la réciprocité*. En effet, si  $\tilde{\mathbf{u}}$  est à l'équilibre élastique sous le chargement  $\tilde{\varphi}$  (chaque choix de  $\tilde{\varphi}$  définissant un tel champ virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}$ ), (30) entraîne les deux identités

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) : \mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) dV = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) dV = \int_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} \cdot \boldsymbol{\xi} dS$$

d'où on tire :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) : [\mathbf{C}^* - \mathbf{C}] : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) dV = \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\varphi} \cdot \boldsymbol{\xi}) dS \equiv R(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad (31)$$

Cette relation peut aussi être obtenue comme conséquence du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

Pour tout champ virtuel (également souvent qualifié d'« adjoint »)  $\tilde{\mathbf{u}}$  défini par  $\tilde{\varphi}$ , l'*écart à la réciprocité*  $R(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{u}})$  est ainsi explicitement connu en fonction des données  $(\boldsymbol{\xi}, \varphi)$ . On doit avoir

$$R(\mathbf{C}^*, \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (32)$$

L'équation (31) fournit ainsi, pour chaque choix de  $\tilde{\varphi}$ , une équation scalaire indépendante pour la détermination des paramètres définissant  $\mathbf{C}^*$ . En particulier, des études théoriques [15, 5] sur l'identifiabilité de  $\mathbf{C}^*$  exploitent (31) sous forme linéarisée (i.e. en posant  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^N[\mathbf{C}] + o(|\delta\mathbf{C}|)$ ) et avec des champs  $\tilde{\mathbf{u}}$  judicieusement choisis selon un procédé initialement proposé par Calderon [8], de façon à faire apparaître au second membre de (31) la transformée de Fourier spatiale de  $\delta\mathbf{C}$ . Ces concepts ont été étendus à l'identifiabilité des rigidités élastiques dans le cadre des plaques de Love-Kirchhoff ; par exemple il est montré dans [16] que ces rigidités peuvent être identifiées de façon unique à partir de la connaissance de l'application Dirichlet-Neumann.

### 5.2 Identification de fissures

Supposons maintenant que les champs inconnus des modules élastiques  $\mathbf{C}^*$  correspondent en effet à un champ de modules élastiques connus  $\mathbf{C}$  et à une fissure inconnue  $\Gamma$  dans le corps  $\Omega$ . Sous les hypothèses d'une fissure de surface libre de contraintes et d'un chargement extérieur  $\boldsymbol{\xi}, \varphi$  ouvrant la fissure on peut reconsidérer l'écart à la réciprocité défini auparavant et on obtient en tenant compte de la nouvelle frontière  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} [\![\mathbf{u}^*]\!] \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\varphi} \cdot \boldsymbol{\xi}) dS \equiv R(\Gamma, \tilde{\mathbf{u}}) \quad (33)$$

Dans le cas d'une fissure plane un certain nombre de travaux [1, 2] ont démontré qu'il est possible de choisir des familles de champs adjoints  $\tilde{\mathbf{u}}$  permettant d'identifier la normale du plan de la fissure, la position de ce plan et enfin l'étendue de cette fissure dans le plan. Un résultat similaire a été obtenu récemment dans le cas élastodynamique [7]. À titre d'illustration de cette dernière approche, nous considérons une fissure droite (ligne inclinée sur la figure 9) à l'intérieur d'un solide élastique de forme rectangulaire (hypothèse des déformations planes). Une « expérience » numérique est réalisée en imposant une histoire de distribution de

forces  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  à la frontière et calculant la réponse dynamique en déplacement  $\xi(\mathbf{x}, t)$  du solide fissuré. Une fonctionnelle d'écart à la réciprocité  $R(\Gamma, \tilde{\mathbf{u}})$  du type (33) est alors construite et calculée pour des champs adjoints  $\tilde{\mathbf{u}}$  correspondant à des ondes planes progressives, pour toutes les positions du front d'onde le long de chaque direction de propagation adjointe. On note le front d'onde adjointe au-delà duquel  $R(\Gamma, \tilde{\mathbf{u}})$  cesse d'être nul (lignes droites colorées sur la figure 9). La théorie [7] prévoit que la fissure doit être située à l'intérieur de la région enfermée par l'enveloppe de tous ces fronts d'ondes adjointes, ce qui est assez bien retrouvé sur le résultat de simulation représentée par la figure 9. Cette approche n'a pas encore été appliquée à des données expérimentales réelles.

## 6 Conclusion

Cet aperçu montre que l'exploitation de mesures de champs peut être faite au moyen de techniques directement issues des principes fondamentaux de la mécanique des solides déformables. On construit ainsi des critères à signification physique plus forte que les techniques de moindres carrés régularisés. Des propriétés intéressantes sont mises en lumière : localisation spatiale de défauts, formulation autorisant des choix *ad hoc* de champs adjoints adaptés au problème pratique considéré. Ces idées correspondent à certaines techniques proposées par ailleurs par des mathématiciens et selon un cheminement intellectuel différent. Les applications à l'exploitation de mesures de champ réelles restent pour la plupart à faire. Ces méthodes nous paraissent avoir un potentiel d'application important, et nous espérons que cet article aura pu contribuer à clarifier les idées sous-jacentes et susciter ainsi des développements et applications dans de nouvelles directions.

## Références bibliographiques

- [1] ANDRIEUX, S., BEN ABDA, A., BUI, H. D. Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, **324**, 1431–1438 (1997).
- [2] BEN ABDA, A., BEN AMEUR, H., JAOUA, M. Identification of 2D cracks by boundary elastic measurements. *Inverse Problems*, **15**, 67–77 (1999).
- [3] BEN ABDALLAH, JALEL. *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de Doctorat, Ecole polytechnique (1995).
- [4] BONNET, M., REYNIER, M. On the estimation of the geometrical support of modelling defects using the distributed error in constitutive equation. In *Inverse Problems, Control and Shape Optimization (Carthage, Tunisie, 8–10 avril 1998)*, 65–70 (1998).
- [5] BUI, H. D. Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, 26–35. Hermès (1995).
- [6] BUI, H. D., CONSTANTINESCU, A. Spatial localization of the error of constitutive law for the identification of defects in elastic bodies. *Arch. Mech.*, **52**, 511–522 (2000).
- [7] BUI H.D., CONSTANTINESCU A., MAIGRE H. Numerical Identification of Planar Cracks in Elastodynamics using the Reciprocity Gap in *PICOF'02, Proceedings of the 2nd Conference on Inverse Problems Control and Shape Optimization*, 55–60, ed. T. Ha Duong, M. Jaoua, J. Jaffré, INRIA (France), 2002.
- [8] CALDERON, A. P. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics.*, 65–73. Soc. Brasiliense de Matematica, Rio de Janeiro (1980).
- [9] CHAVENT, G., KUNISCH, K., ROBERTS, J. E. Primal-dual formulations for parameter estimation problems. In M.A. Raupp, J. Douglas Jr, J. Koiller, G.P. Menzala (eds.), *Computational and Applied Mathematics*, vol. 18, 173–229 (1999).
- [10] CHOUAKI, A., LADEVÈZE, P., PROSLIER, L. An updating of structural dynamic model with damping. In D. Delaunay, M. Raynaud, K. Woodbury (eds.), *Inverse problems in engineering : theory and practice*, 335–342 (1996). (Le Croisic, 9-14 juin 1996).
- [11] CONSTANTINESCU, A. On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering*, **1**, 293–315 (1995).

- [12] CONSTANTINESCU, A. On the identification of elastic moduli in plates. in *Inverse problems in engineering mechanics* (Proceedings of the ISIP'98 conference, Nagano, Japan, march 1998) ed. M. Tanaka, G. S. Dulikravich, 205–214, Elsevier (1998).
- [13] ENGL, H. W., HANKE, M., NEUBAUER, A. *Regularization of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht (1996).
- [14] GRÉDIAC, M., TOUSSAINT, E., PIERRON, F. Principe de la methode des champs virtuels avec champs speciaux . *Mécanique et Industries*, présent numéro (2002).
- [15] IKEHATA, M. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**, 1635–1644 (1990).
- [16] IKEHATA M. - An inverse problem for the plate in the Love-Kirchhoff Theory, *SIAM J. Appl. Math.*, **53**, 942 - 970, August 1993
- [17] KOHN, R., VOGELIUS, M. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Comm Pure Appl. Math.*, **40**, 745–777 (1987).
- [18] LADEVÈZE, P., CHOUAKI, A. Application of *a posteriori* error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, **15**, 49–58 (1999).
- [19] LADEVÈZE, P., REYNIER, M., NEDJAR, D. Parametric correction of finite element models using modal tests. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, 91–100. Springer-Verlag (1993). (IUTAM Symposium, 11-15 Mai 1992, Tokyo, Japon).
- [20] MOINE, P. *Recalage de modèles éléments finis avec viscosité*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris (1997).
- [21] REYNIER, M. *Sur le contrôle de modélisations éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1990).
- [22] TARDIEU, N. AND CONSTANTINESCU, A. On the determination of elastic coefficients from indentation experiments. *Inverse Problems*, **16**(3), 577–58 (2000).
- [23] TIKHONOV, A. N., GONCHARSKI, A. V., STEPANOV, V. V., YAGODA, A. G. *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. Kluwer Academic Publishers (1995).

## Table des figures

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Exemple synthétique de calcul de densité d'erreur en relation de comportement (ERC) : inhomogénéité élastique $\delta C$ utilisée pour définir les données simulées (haut) et carte de densité d'ERC (bas) pour une mesure simulée $(\xi, \varphi)$ .<br><i>Synthetic example of computed distribution of error in constitutive equation (ECE) : elastic inhomogeneity used to define the simulated data (top) and distribution of ECE for one boundary 'measurement' <math>(\xi, \varphi)</math>.</i>   | 13 |
| 2 | Erreur en relation de comportement et vibrations libres (exemple synthétique) : maillage et carte de module d'Young montrant le défaut simulé.<br><i>Error in constitutive equation and free vibrations (synthetic example) : FE mesh and distribution of Young modulus showing the simulated defect.</i>  | 14 |
| 3 | Erreur en relation de comportement (ERC) et vibrations libres (exemple synthétique) : carte d'ERC calculée à partir d'un mode propre entièrement connu.<br><i>Error in constitutive equation (ECE) and free vibrations (synthetic example) : FE mesh and distributed ECE computed from one perfectly known modal displacement.</i>   | 15 |
| 4 | Erreur en relation de comportement et vibrations libres (exemple avec données réelles) : description de la structure test (haut) et modèle éléments finis (bas).<br><i>Error in constitutive equation and free vibrations (real-data example) : description of the test structure (top) and FE mesh (bottom).</i>  | 16 |
| 5 | Distributions d'erreur en relation de comportement (normalisées de sorte que $\max=1$ ) pour le « petit » défaut (éléments 61-62, haut) et le « grand » défaut (éléments 61-62-63-64, bas), calculées pour 13 modes propres expérimentaux mesurés (48 mesures de déplacement normal par mode). Les numéros d'éléments sont donnés par $24(J-1) + I$ ( $1 \leq I \leq 24$ , $1 \leq J \leq 4$ ), avec $I$ et $J$ définis sur les graphiques.<br><i>Error in constitutive equation distributions (normalized to <math>\max=1</math>) for the 'small' (elements 61-62, top) and 'large' (elements 61-62-63-64, bottom) defects, using real data for 13 measured modal displacements (48 measured values of normal displacement per mode). The element numbers are given by <math>24(J-1) + I</math> (<math>1 \leq I \leq 24</math>, <math>1 \leq J \leq 4</math>), with <math>I</math> and <math>J</math> as defined on the graphs.</i> | 17 |
| 6 | Comparaison entre moindres carrés et erreur en relation de comportement : géométrie et maillage, défaut servant à définir les mesures simulées (haut) et défaut « d'essai » (bas).<br><i>Comparison between output least-squares functional and error in constitutive equation functional : geometry and mesh, defect used to define the simulated data (top) and 'trial' defect (bottom).</i>   | 18 |
| 7 | Comparaison entre fonctionnelles de moindres carrés $\mathcal{J}(C)$ et d'erreur en relation de comportement $\mathcal{E}(C)$ : fonctionnelles $J(i, j)$ (haut) et $E(i, j)$ (bas) définies pour les « expériences » 1 à 76.<br><i>Comparison between output least-squares functional <math>\mathcal{J}(C)</math> and error in constitutive equation functional <math>\mathcal{E}(C)</math> : functionals <math>J(i, j)</math> (top) and <math>E(i, j)</math> (bottom) defined for the 'experiments' 1 to 76.</i>  | 19 |
| 8 | Comparaison entre fonctionnelles de moindres carrés $\mathcal{J}(C)$ et d'erreur en relation de comportement $\mathcal{E}(C)$ : fonctionnelles $J(i, j)$ (haut) et $E(i, j)$ (bas) définies pour les « expériences » 9 et 10.<br><i>Comparison between output least-squares functional <math>\mathcal{J}(C)</math> and error in constitutive equation functional <math>\mathcal{E}(C)</math> : functionals <math>J(i, j)</math> (top) and <math>E(i, j)</math> (bottom) defined for the 'experiments' 9 and 10.</i>  | 20 |
| 9 | Identification d'une région convexe à l'intérieur de laquelle une fissure inconnue doit se trouver, au moyen d'une fonctionnelle d'écart à la réciprocité et de champs adjoints du type onde plane progressive.<br><i>Identification, using the reciprocity gap functional with progressive plane-wave adjoint fields, of a convex region inside of which an unknown crack must lie.</i>   | 21 |

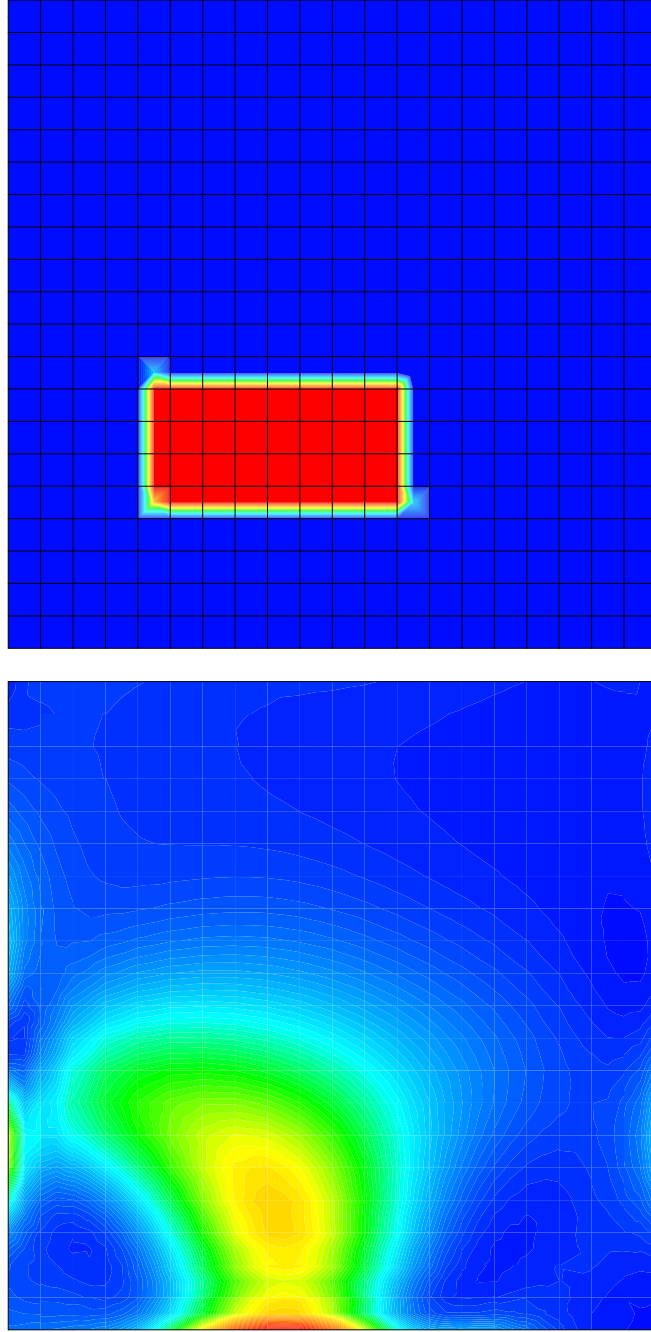


FIG. 1 – Exemple synthétique de calcul de densité d'erreur en relation de comportement (ERC) : inhomogénéité élastique  $\delta\mathbf{C}$  utilisée pour définir les données simulées (haut) et carte de densité d'ERC (bas) pour une mesure simulée  $(\xi, \varphi)$ .

*Synthetic example of computed distribution of error in constitutive equation (ECE) : elastic inhomogeneity used to define the simulated data (top) and distribution of ECE for one boundary 'measurement'  $(\xi, \varphi)$ .*

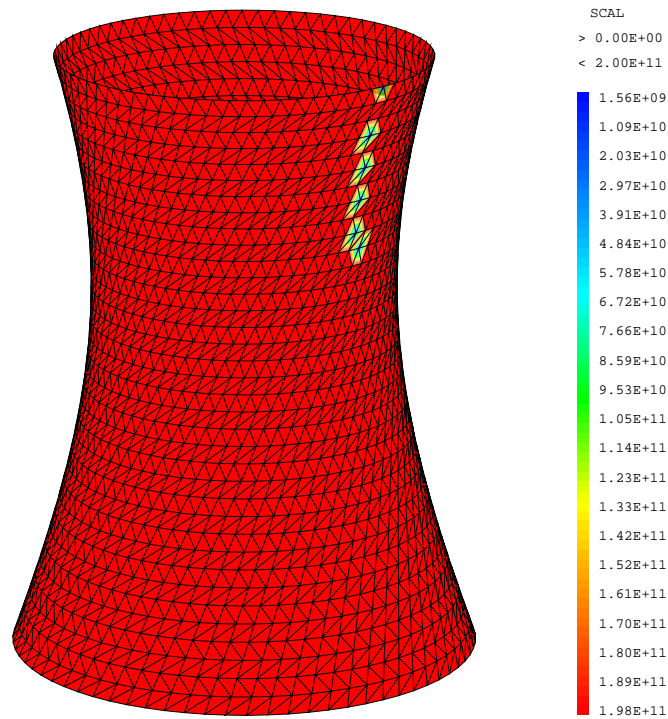


FIG. 2 – Erreur en relation de comportement et vibrations libres (exemple synthétique) : maillage et carte de module d'Young montrant le défaut simulé.

*Error in constitutive equation and free vibrations (synthetic example) : FE mesh and distribution of Young modulus showing the simulated defect.*



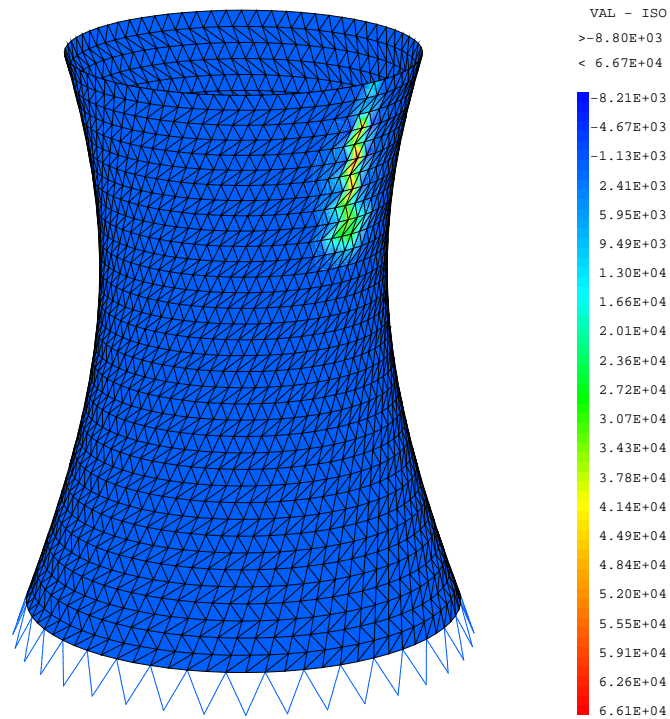


FIG. 3 – Erreur en relation de comportement (ERC) et vibrations libres (exemple synthétique) : carte d'ERC calculée à partir d'un mode propre entièrement connu.

*Error in constitutive equation (ECE) and free vibrations (synthetic example) : FE mesh and distributed ECE computed from one perfectly known modal displacement.*

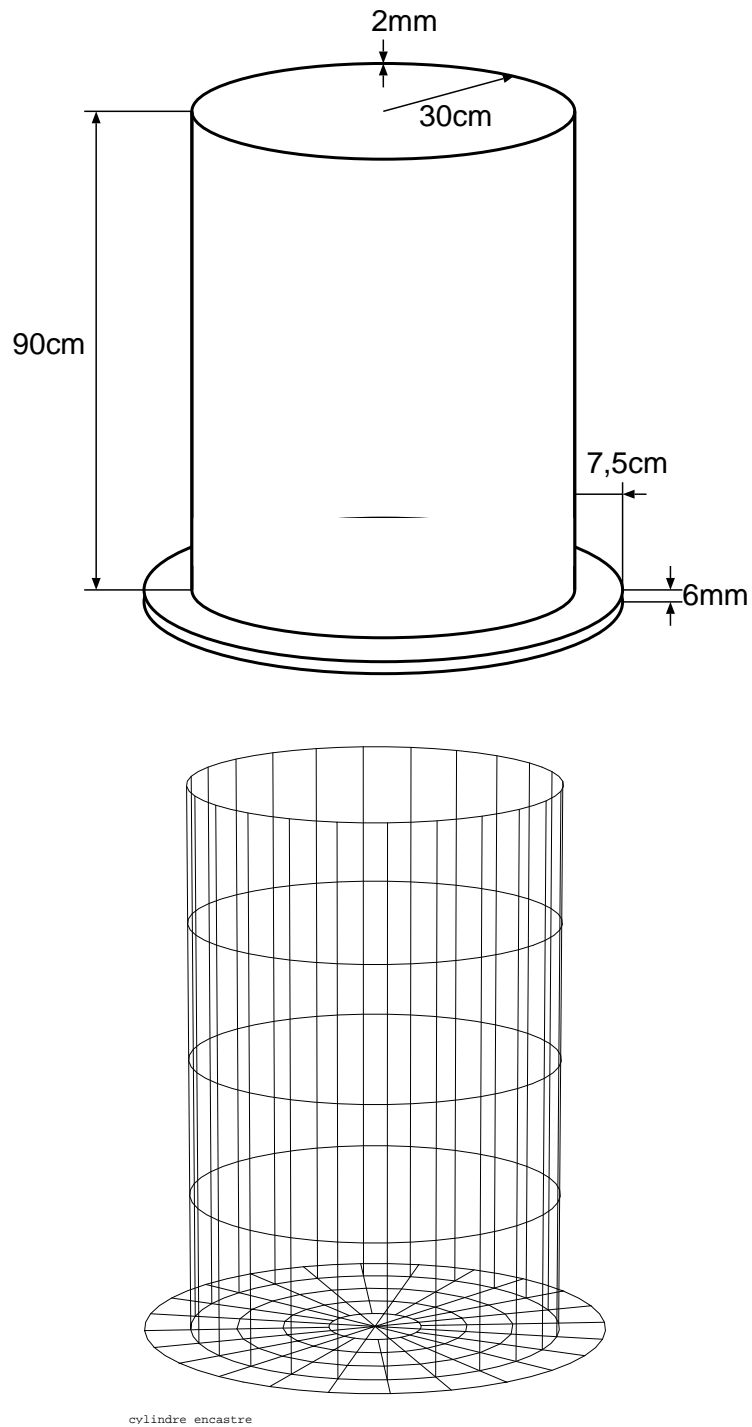


FIG. 4 – Erreur en relation de comportement et vibrations libres (exemple avec données réelles) : description de la structure test (haut) et modèle éléments finis (bas).

*Error in constitutive equation and free vibrations (real-data example) : description of the test structure (top) and FE mesh (bottom).*

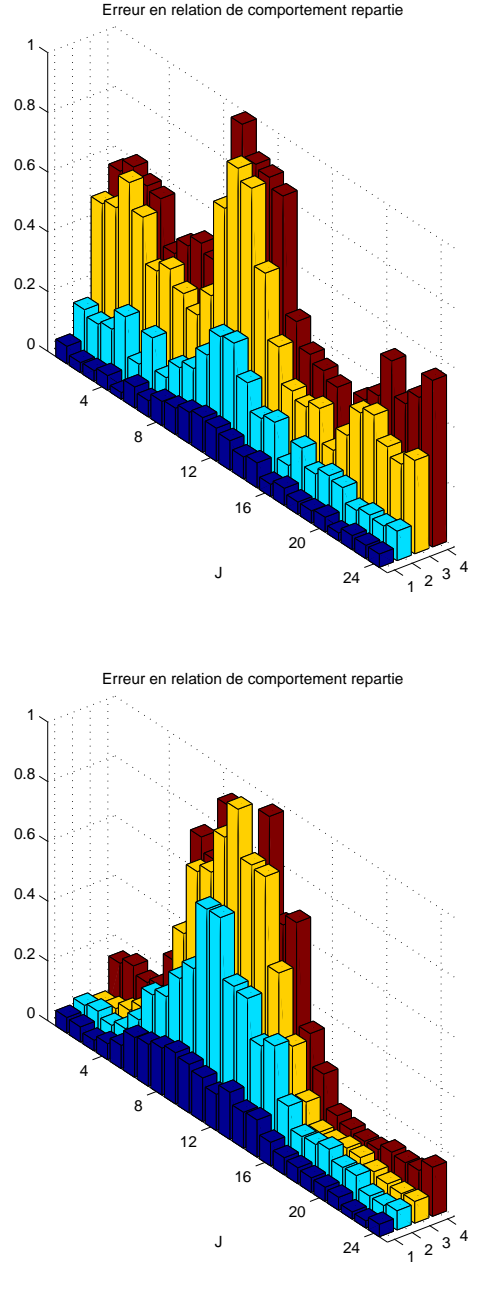


FIG. 5 – Distributions d’erreur en relation de comportement (normalisées de sorte que  $\max=1$ ) pour le « petit » défaut (éléments 61-62, haut) et le « grand » défaut (éléments 61-62-63-64, bas), calculées pour 13 modes propres expérimentaux mesurés (48 mesures de déplacement normal par mode). Les numéros d’éléments sont donnés par  $24(J - 1) + I$  ( $1 \leq I \leq 24$ ,  $1 \leq J \leq 4$ ), avec  $I$  et  $J$  définis sur les graphiques.

*Error in constitutive equation distributions (normalized to  $\max=1$ ) for the 'small' (elements 61-62, top) and 'large' (elements 61-62-63-64, bottom) defects, using real data for 13 measured modal displacements (48 measured values of normal displacement per mode). The element numbers are given by  $24(J - 1) + I$  ( $1 \leq I \leq 24$ ,  $1 \leq J \leq 4$ ), with  $I$  and  $J$  as defined on the graphs.*

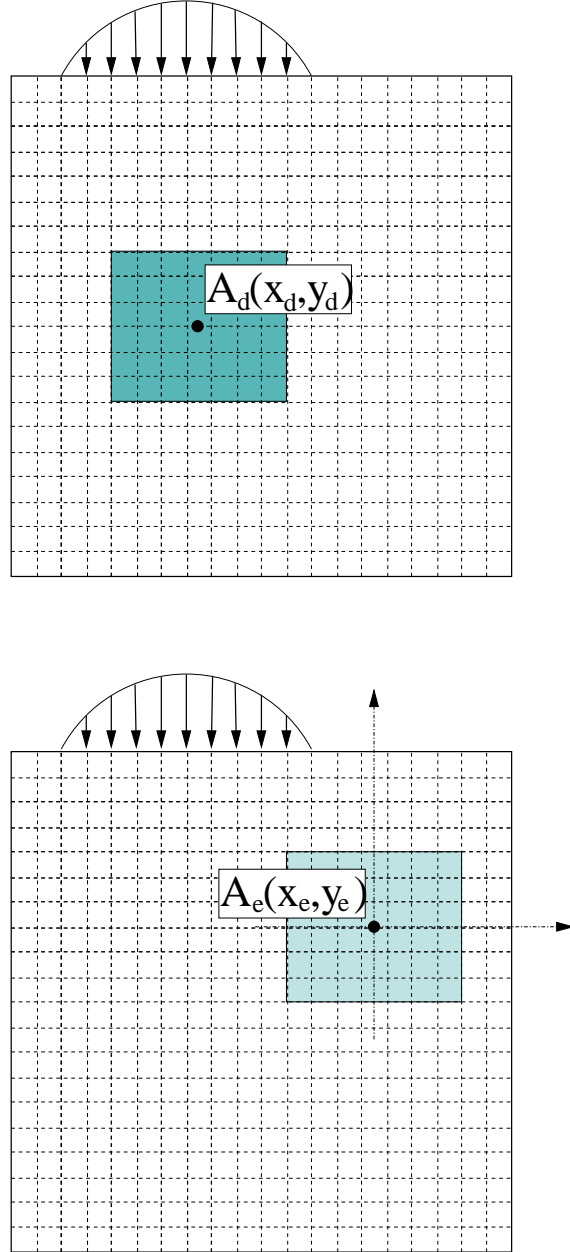


FIG. 6 – Comparaison entre moindres carrés et erreur en relation de comportement : géométrie et maillage, défaut servant à définir les mesures simulées (haut) et défaut « d’essai » (bas).

*Comparison between output least-squares functional and error in constitutive equation functional : geometry and mesh, defect used to define the simulated data (top) and ‘trial’ defect (bottom).*

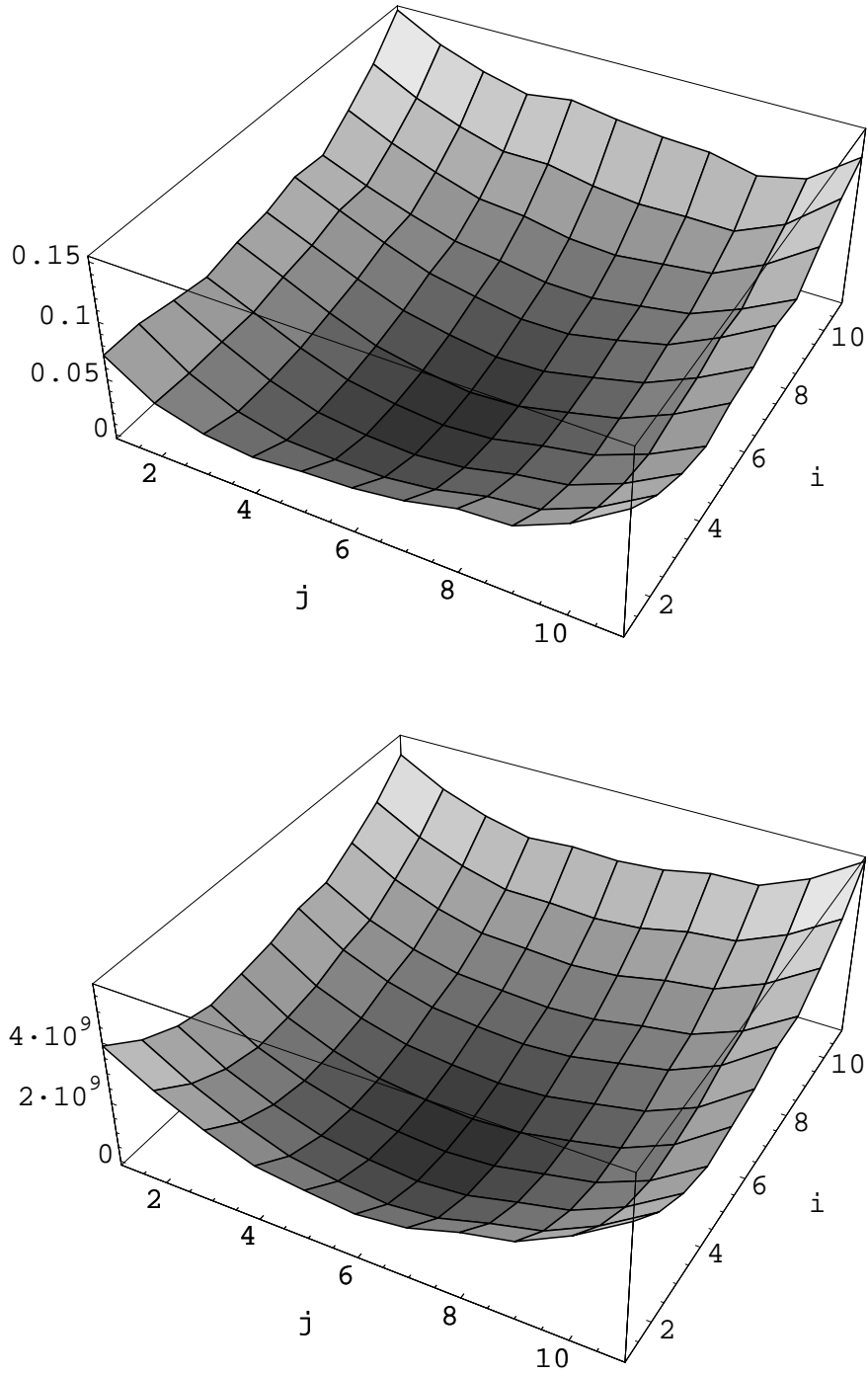


FIG. 7 – Comparaison entre fonctionnelles de moindres carrés  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  et d'erreur en relation de comportement  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  : fonctionnelles  $J(i, j)$  (haut) et  $E(i, j)$  (bas) définies pour les « expériences » 1 à 76.

*Comparison between output least-squares functional  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  and error in constitutive equation functional  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  : functionals  $J(i, j)$  (top) and  $E(i, j)$  (bottom) defined for the 'experiments' 1 to 76.*

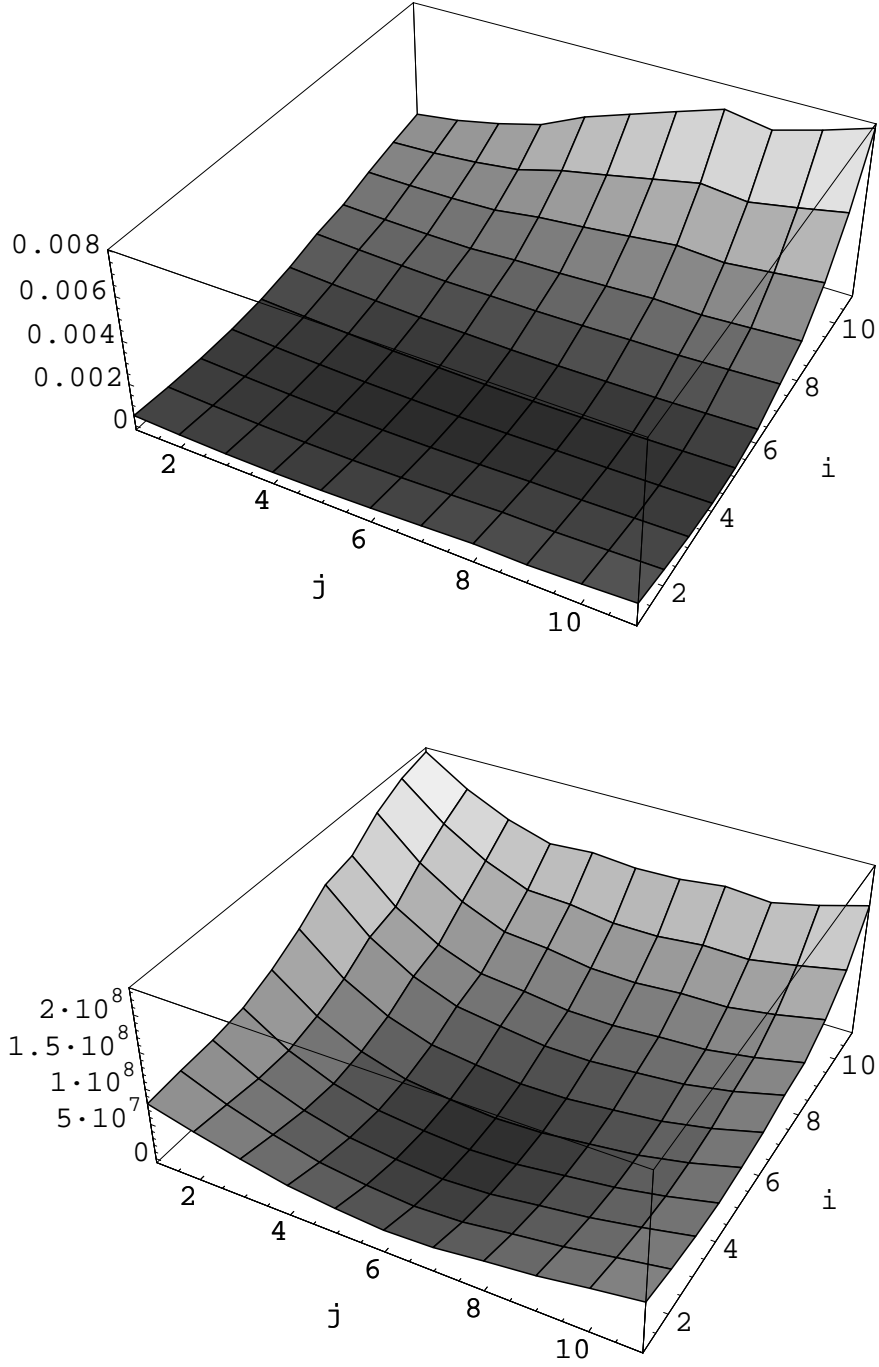


FIG. 8 – Comparaison entre fonctionnelles de moindres carrés  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  et d'erreur en relation de comportement  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  : fonctionnelles  $J(i, j)$  (haut) et  $E(i, j)$  (bas) définies pour les « expériences » 9 et 10.

*Comparison between output least-squares functional  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  and error in constitutive equation functional  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  : functionals  $J(i, j)$  (top) and  $E(i, j)$  (bottom) defined for the 'experiments' 9 and 10.*

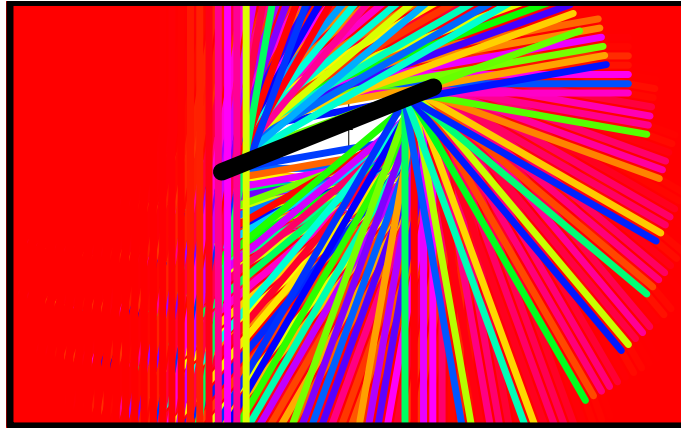


FIG. 9 – Identification d’une région convexe à l’intérieur de laquelle une fissure inconnue doit se trouver, au moyen d’une fonctionnelle d’écart à la réciprocité et de champs adjoints du type onde plane progressive.

*Identification, using the reciprocity gap functional with progressive plane-wave adjoint fields, of a convex region inside of which an unknown crack must lie.*